Elektriciteit en magnetisme 2
Instructor: A.M. van den Berg
Nederlandse versie: zie pagina's 4-6

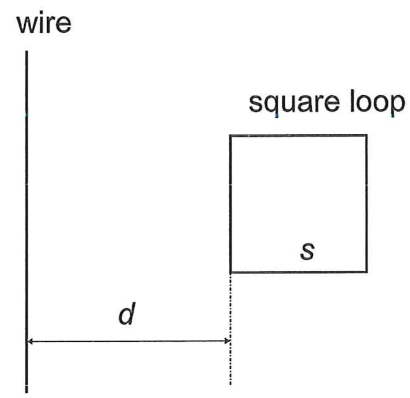
You don't have to use separate sheets for every question.
Write your name and S number on every sheet
There are **6 questions** with a total number of marks: 110

WRITE CLEARLY

(1) (Total 20 marks)
Through a long, straight wire runs a current $I(t)$. The magnetic field strength for such a wire is given as:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I(t)}{2\pi \, r} \hat{\phi}$$

with r the distance to the wire. A square loop of wire of side s is lying in the plane of the current-carrying wire at a distance d, see the figure.



(a) (10 marks) Calculate the magnetic flux through the loop, assuming the current through the wire has a constant value I_0. Hint:

$$\int_a^b \frac{1}{r} dr = \ln(b) - \ln(a)$$

(b) (10 marks) Find the induced emf in the square loop for the case that the current through the wire changes as $I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$.

(2) (Total 20 marks)
Determine whether the vector fields given by the following expressions in cylindrical coordinates could be magnetic fields:

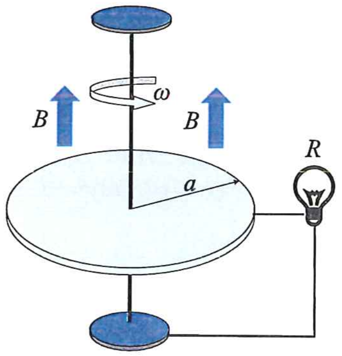
(a) (10 marks)

$$\vec{A}(r,\phi,z) = \frac{a}{r}\cos^2(\phi)\,\hat{r}$$

(b) (10 marks)

$$\vec{A}(r,\phi,z) = \frac{a}{r^2}\cos^2(\phi)\,\hat{r}$$

(3) (Total 10 marks)
A metal disk of radius a rotates with angular velocity ω about a vertical axis, through a uniform field $\vec{B}$, which is parallel to this vertical axis. A circuit is made by connecting one end of a resistor to the axle and the other end to a sliding contact which touches the outer edge of the disk; see the figure. Find the current in the resistor.



(4) (Total 20 marks)
Suppose that the electric field vector for a spherical wave is given as:

$$\vec{E}(r,\theta,\phi,t) = A\frac{\sin\,\theta}{r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{k\,r}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\phi}$$

with $\omega/k = c$.
For notational convenience let $u \equiv (kr-\omega t)$ in your calculations and use:

$$\int \cos(u)dt = -\frac{1}{\omega}\sin(u) \qquad \text{and} \qquad \int \sin(u)dt = +\frac{1}{\omega}\cos(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\cos(u) = -k\,\sin(u) \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\sin(u) = +k\,\cos(u)$$

(a) (15 marks) Show that $\vec{E}$ obeys all four Maxwell's equations, in vacuum, and find the associated magnetic field.
(b) (5 marks) Calculate the Poynting vector.

(5) (Total 20 marks)
The fourth Maxwell equation is:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \mu_0 \, \vec{J}_d = \mu_0 \, \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

To directly measure the displacement current density J_d, researchers use a time-varying voltage to charge and discharge a circular parallel-plate capacitor. Find the displacement current density and electric field as a function of time that would produce a magnetic field given by:

$$\vec{B} = \frac{r \, \omega \, \Delta V \, \cos(\omega \, t)}{2 \, d \, c^2} \hat{\phi}$$

where r is the distance from the center of the capacitor, ω is the angular frequency of the applied voltage ΔV, d is the plate spacing, and c is the speed of light.

(6) (Total 20 marks)
Consider a parallel-plate capacitor which is at rest in frame S_0. On each of the two plates of this capacitor there is a surface charge σ_0; one plate has positive charges, the other negative ones. In between these plates, these charges produce an electric field $\vec{E}_0$. An observer, which is located in another system S, moves with a velocity v_0 with respect to system S_0.

(a) (10 marks) Proof that the transformation of the electric field vector for the case where the velocity vector v_0 is parallel to E_0 can be written as:

$$E^{\parallel} = E_0^{\parallel}.$$

For the case where the velocity vector is perpendicular to $\vec{E}_0$, proof that

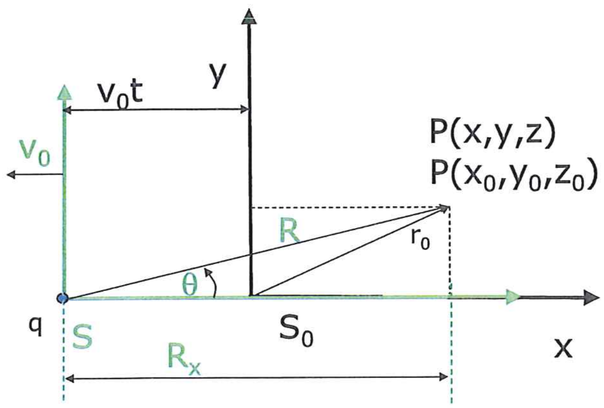
$$E^{\perp} = \gamma_0 E_0^{\perp},$$

where $\gamma_0 = \left[1 - (v_0/c)^2\right]^{-1/2}$.

(b) (10 marks) Use these two equations to proof that the electric field at location P at distance R from a point charge q, which is in uniform motion, can be written as:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0}{\left(\gamma_0^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R^3},$$

where P, R, θ, and v_0 are shown in the figure. Check this equation for the case where $v_0 = 0$.



Elektriciteit en magnetisme 2
Instructor: A.M. van den Berg
English version: see pages 1-3

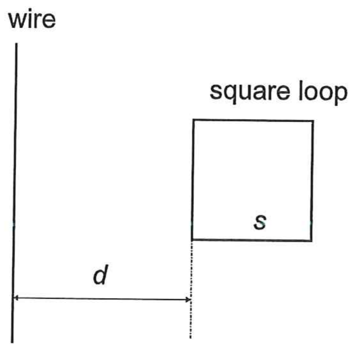
Het is niet noodzakelijk iedere vraag op een apart vel te maken.
Plaats op ieder vel je **naam en S-nummer**
Er zijn **6 vragen** met een totaal aantal punten: 110

SCHRIJF DUIDELIJK

(1) (Totaal 20 punten)
Door een lange rechte draad loopt een stroom $I(t)$. De magnetische veldsterkte voor een dergelijke draad wordt gegeven als:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I(t)}{2\pi \, r} \hat{\phi}$$

waarbij r de afstand tot de draad is. Een rechthoekige draadlus met zijde s ligt in het vlak van de stroomvoerende rechte draad, waarbij de afstand tot de draad gegevens is als d; zie de figuur.



(a) (10 punten) Bereken de magnetische flux door de rechthoekige draadlus, waarbij aangenomen mag worden, dat de stroom door de rechte draad constant in de tijd is, dus: $I(t) = I_0$.
Hint:

$$\int_a^b \frac{1}{r} dr = \ln(b) - \ln(a)$$

(b) (10 punten) Bereken de geïnduceerde elektromotorische kracht in de rechthoekige draadlus voor het geval, dat de stroom door de rechte draad verandert volgens:
$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$.

(2) (Totaal 20 punten)
Bepaal of de vector velden, die door de volgende uitdrukkingen zijn gegeven magnetische velden kunnen zijn. Let op, in deze vergelijkingen wordt het cylindrische coördinaten systeem gebruikt.

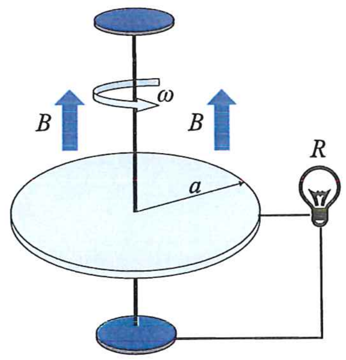
(a) (10 punten)

$$\vec{A}(r, \phi, z) = \frac{a}{r} \cos^2(\phi) \, \hat{r}$$

(b) (10 punten)

$$\vec{A}(r, \phi, z) = \frac{a}{r^2} \cos^2(\phi) \, \hat{r}$$

(3) (Totaal 10 punten)
Een metalen schijf met een straal a draait met een hoekfrequentie ω om een verticale as. Deze schijf is geplaatst in een homogeen magneetveld $\vec{B}$, dat parallel aan deze as staat. Er wordt een stroomkring gemaakt door het ene einde van een weerstand te verbinden met de draaiende as en het andere einde via een sleepcontact aan de buitenrand van de draaiende schijf; zie de figuur. Bepaal de stroom door de weerstand.



(4) (Totaal 20 punten)
Neem aan dat de elektrische veld vector voor een bolvormige golf geschreven kan worden als:

$$\vec{E}(r,\theta,\phi,t) = A\frac{\sin\,\theta}{r}\left[\cos(kr-\omega t) - \frac{1}{k\,r}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\phi}$$

met $\omega/k = c$.
Gebruik de afkorting $u \equiv (kr - \omega t)$ in de berekeningen en gebruik:

$$\int \cos(u)dt = -\frac{1}{\omega}\sin(u) \qquad \text{en} \qquad \int \sin(u)dt = +\frac{1}{\omega}\cos(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\cos(u) = -k\ \sin(u) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\sin(u) = +k\ \cos(u)$$

(a) (15 punten) Laat zien, dat $\vec{E}$ een oplossing is voor de vier vergelijkingen van Maxwell in vacuüm, en bepaal het bijbehorende magnetische veld.
(b) (5 punten) Bereken de Poynting vector.

(5) (Totaal 20 punten)
De vierde vergelijking van Maxwell is:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\ \vec{J} + \mu_0\ \vec{J_d} = \mu_0\ \vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Om op een directe manier de verplaatsingsstroomdichtheid J_d te bepalen, sluiten onderzoekers een wisselspanning aan op een cirkelvormige vlakke parallelle plaat condensator, die hierdoor geladen en ook ontladen wordt. Bepaal de verplaatsingsstroomdichtheid en de elektrische veldsterkte, als functie van de tijd, om een magneetveld te genereren dat gegeven is als:

$$\vec{B} = \frac{r\ \omega\ \Delta V\ \cos(\omega\ t)}{2\ d\ c^2}\hat{\phi}$$

waarbij r de radiële afstand is tot het midden van de condensator, ω is de hoekfrequentie van de aangebrachte spanning ΔV, d is de afstand tussen de twee platen van de condensator, en c is de lichtsnelheid.

(6) (Totaal 20 punten)
Neem een parallelle-plaat condensator, die in rust is in stelsel S_0. Op ieder van de twee platen van deze condensator bevindt zich een oppervlakte lading σ_0; de ene plaat heeft positieve, de andere plaat negatieve lading. Deze ladingen veroorzaken tussen de platen een elektrisch veld $\vec{E}_0$. Een waarnemer, die zich in stelsel S bevindt, beweegt zich met een snelheid v_0 ten opzichte van stelsel S_0.

(a) (10 punten) Bewijs dat de transformatie van het elektrische veld, voor het geval de snelheid v_0 parallel is aan E_0, gegeven wordt als:

$$E^{\|} = E_0^{\|}.$$

Voor het geval, waar de snelheidsvector loodrecht op $\vec{E}_0$ staat, bewijs dat

$$E^{\perp} = \gamma_0 E_0^{\perp},$$

waarbij $\gamma_0 = \left[1 - (v_0/c)^2\right]^{-1/2}$.

(b) (10 punten) Gebruik deze twee vergelijkingen om te bewijzen, dat het elektrische veld in punt P op afstand R van een puntlading q, en die zich beweegt met uniforme snelheid v_0, te schrijven is als:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma_0}{\left(\gamma_0^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^{3/2}} \frac{\vec{R}}{R^3},$$

waarbij P, R, θ, en v_0 zijn gegeven in de figuur. Controleer deze vergelijking voor het geval $v_0 = 0$.